RECORDANDO SEBASTIÃO E SILVA

HÉLIO BERNARDO LOPES

Quem teve a oportunidade de conhecer e de conviver com Sebastião e Silva nunca deixará de o recordar como o grande mestre e pedagogo que realmente foi. Para muitos, como é o caso do autor deste texto, Sebastião e Silva terá mesmo sido o maior matemático português de sempre, porventura, acompanhado de Aureliano de Mira Fernandes.

As suas qualidades de pedagogo e a determinação forte em modernizar o ensino da Matemática no âmbito liceal do tempo, levaram a que o Ministério da Educação Nacional o encarregasse de superintender em tal tarefa.

Daqui resultou o suporte de toda esta acção, assente no seu **Compêndio de Matemática**, em quatro volumes, mas também no **Guia Para a Utilização do Compêndio de Matemática**, em três volumes, sendo que esta segunda obra se destinava, acima de tudo, ao corpo docente.

Estes dois textos cobriam uma vastidão grande de temas, e complementavam os adoptados oficialmente sobre Álgebra, Geometria Analítica Plana, Trigonometria e Aritmética Racional. De resto, as obras que cobriam os dois primeiros temas[1] eram também da autoria de Sebastião e Silva.

Sendo professor catedrático de Matemática da Faculdade de Ciências de Lisboa, depois de uma passagem pelo Instituto Superior de Agronomia, e sendo membro da Academia das Ciências de Lisboa e da Academia dos Linces de Roma, nunca foi, em todo o caso, uma pessoa distante dos seus discípulos de níveis diversos, prestando sempre atenção a quanto lhe parecesse um ponto a apoiar e susceptível de, sob qualquer forma, ser posteriormente alvo de possíveis desenvolvimentos.

Ora, à medida que iam sendo publicadas pelos serviços do Ministério da Educação Nacional as duas primeiras obras referidas atrás, semanalmente distribuídas aos alunos das turmas-piloto[2], chegou ao conhecimento do académico um trabalho sobre Análise Combinatória, enviado por certa professora do Liceu Nacional de D. João de Castro, e da autoria de um seu aluno.

O referido aluno demonstrara, usando o método de indução matemática, a validade da seguinte fórmula sobre arranjos:

$$\underbrace{{}^{m}A_{p} = p\left({}^{m-1}A_{p-1} + {}^{m-2}A_{p-1} + \cdots + {}^{p-1}A_{p-1}\right) \quad \Leftarrow \quad m \geq p \geq 1}_{(1)}$$

onde m e p são inteiros positivos.

Com a sua invulgar qualidade pedagógica, Sebastião e Silva resolveu incorporar a referida fórmula no Guia para a Utilização do Compêndio de Matemática, na página 145 do 2º e 3º Volumes.

Naturais dificuldades de comunicação, para mais na década de sessenta do século passado, levaram a alguma falta de precisão histórica na exposição que fez sobre o trabalho do aluno. É assim que ali se pode ler que "meditando sobre a propriedade:

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

[1] **Compêndio de Álgebra**, em dois volumes, e **Geometria Analítica Plana**, num só volume.

[2] As duas obras referidas foram mais tarde editadas pelo Gabinete de Estudos e Planeamento do ministério da tutela, já depois da Revolução de 25 de Abril, por decisão do Professor António Brotas, aquando do seu desempenho de funções governativas. Recentemente, António Brotas, em texto seu de opinião, salientou o imperativo de voltar a pôr à venda os exemplares que pensa existirem ainda no ministério.

que despertou o seu interesse, o referido aluno começou a fazer experiências com o Triângulo de Pascal e concluiu, por indução experimental, que deve ser válida a fórmula (1) sobre arranjos." E mais adiante salienta que "a sua professora aconselhou o aluno a tentar demonstrar a fórmula, indicando-lhe o método de indução matemática."

Ora, em bom rigor, o que o aluno fez foi considerar um triângulo semelhante ao de Pascal, mas com arranjos no lugar de combinações, como se mostra de seguida.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & {}^{0}A_{0} & & & \\ & & {}^{1}A_{0} & & {}^{1}A_{1} & & \\ & {}^{2}A_{0} & & {}^{2}A_{1} & & {}^{2}A_{2} & \\ {}^{3}A_{0} & & {}^{3}A_{1} & & {}^{3}A_{2} & & {}^{3}A_{3} \\ \multicolumn{7}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \end{array}$$

E foi a partir deste triângulo, depois de substituídos os símbolos que nele figuram pelos respectivos valores numéricos, que o aluno concluiu, de facto por indução experimental, a fórmula (1).

A sua professora, tal como refere Sebastião e Silva, sugeriu o método de indução matemática como meio destinado a demonstrar a verdade da referida fórmula.

E assim procedeu o aluno, acabando por conseguir demonstrar o resultado que encontrara, e que Sebastião e Silva apresenta na citada obra, na página 152:

"1ª parte: m=p

$$p.{}^{p-1}A_{p-1} = p(p-1)! = p! = {}^{p}A_{p}$$

2ª parte:

Hipótese: $${}^{m}A_{p} = p\left({}^{m-1}A_{p-1} + {}^{m-2}A_{p-1} + \cdots + {}^{p-1}A_{p-1}\right)$$

Tese: $${}^{m+1}A_{p} = p\left({}^{m}A_{p-1} + {}^{m-1}A_{p-1} + \cdots + {}^{p-1}A_{p-1}\right) =$$

$$p\left({}^{m}A_{p-1} + {}^{m-1}A_{p-1} + {}^{m-2}A_{p-1} + \cdots + {}^{p-1}A_{p-1}\right) =$$

$$p.{}^{m}A_{p-1} + p\left({}^{m-1}A_{p-1} + {}^{m-2}A_{p-1} + \cdots + {}^{p-1}A_{p-1}\right) =$$

$$p.{}^{m}A_{p-1} + {}^{m}A_{p} = p\cdot\frac{m!}{(m-p+1)!} + \frac{m!}{(m-p)!} =$$

$$p\cdot\frac{m!}{(m-p+1)!} + \frac{m!(m-p+1)}{(m-p+1)!} = \frac{m!\,p + m!(m-p+1)}{(m-p+1)!} =$$

$$\frac{m!\left(p+m-p+1\right)}{\left(m-p+1\right)!}=\frac{m!(m+1)}{\left(m-p+1\right)!}=\frac{(m+1)!}{\left(m-p+1\right)!}={}^{m+1}A_p$$

Está assim provado que

$${}^{m}A_p = p\left({}^{m-1}A_{p-1}+\cdots+{}^{p-1}A_{p-1}\right) \qquad \Rightarrow \qquad {}^{m+1}A_p = p\left({}^{m}A_{p-1}+\cdots+{}^{p-1}A_{p-1}\right)”$$

de imediato explicando que “a demonstração é perfeitamente correcta, mas o método não foi aplicado com o aspecto habitual. Para o aplicar, tal como foi indicado, haverá que pôr:

$$m = p + n$$

e tomar n para variável de indução, sendo p uma constante arbitrária. Por outro lado, teremos de fazer a indução em $\mathbf{N}_0$ e não em $\mathbf{N}$.”

Contudo, logo ao início da abordagem da fórmula apresentada e demonstrada pelo aluno, Sebastião e Silva, na página 146, interroga-se: “será esta fórmula um resultado novo?” E continua, salientando que “num campo tão explorado e tão elementar como o da análise combinatória, a probabilidade de encontrar um resultado essencialmente novo é muito pequena.”

E logo completa, salientando que “no caso presente, a fórmula deduz-se trivialmente da seguinte, já conhecida, relativa a combinações[3]:

$$\underbrace{\binom{m}{p}=\binom{m-1}{p-1}+\binom{m-2}{p-1}+\cdots+\binom{p-1}{p-1} \qquad \Leftarrow \qquad m\geq p\geq 1}_{(2)}.$$

Basta multiplicar ambos os membros por factorial de p.”

É verdade que Sebastião e Silva faz uma referência à fórmula (2) no segundo volume do seu Compêndio de Álgebra, na página 27, onde salienta, em linguagem comum, que “cada número do triângulo de Pascal è igual à soma de todos os números duma diagonal descendente da direita para a esquerda que termina na casa imediatamente acima e à esquerda do número considerado.” E exemplifica, com “o número 20 da 7ª linha, que é igual à soma 1+3+6+10.”

Acontece, porém, que Sebastião e Silva não apresenta no Compêndio de Álgebra a fórmula (2), apenas a referindo em linguagem comum. E, como é lógico, por igual não apresenta a respectiva demonstração.

Significa tal que o referido aluno, de facto, poderia ter obtido (1) a partir de (2), multiplicando esta por factorial de p, embora continuasse sem possuir a demonstração de (2). Ora, esta demonstração terá de ser em tudo idêntica à conseguida pelo aluno para a sua fórmula (1), ou seja, por indução matemática e nas condições que o aluno apresentou, ao tempo, à sua professora.

E se é indiscutível que o tema da Análise Combinatória está profundamente explorado e é, de facto, elementar, a verdade é que as técnicas de contagem que a constituem são de aplicação constante. A prova de que assim é está na edição recente da obra, **INTRODUÇÃO À ANÁLISE COMBINATÓRIA. O Problema da Contagem**, da autoria dos académicos, Cristina Oliveira e Fernando Magalhães, e dada à estampa pela Escolar Editora.

O facto de, tantas décadas depois do trabalho do aluno referido, ser ainda possível encontrar pontos da extraordinária obra de Sebastião e Silva que requerem reflexão, é a melhor prova do impacto profundo

[3] Neste ponto do texto Sebastião e Silva introduz uma nota de pé de página, dizendo que “no Compêndio de Álgebra faz-se uma breve referência a esta propriedade em linguagem comum.”

do seu trabalho no plano pedagógico. Sabia ouvir, fazia-se eco, e esperava que se criassem, desse modo, novos ecos do que ia sendo investigado e publicado. E é por tudo isto que a sua obra continua a manter-se viva.

BIBLIOGRAFIA

OLIVEIRA, Cristina, MAGALHÃES, Fernando, (2004): *INTRODUÇÃO À ANÁLISE COMBINATÓRIA. O Problema da Contagem*, Escolar Editora, Lisboa.

SILVA, J. Sebastião e, PAULO, J. D. da Silva, (1974): *Compêndio de Álgebra*, *2º Tomo, 4ª Edição,* Livraria Popular de Francisco Franco.

SILVA, J. Sebastião e, (1977): *Guia para a Utilização do Compêndio de Matemática*, *2º e 3º Volumes,* Gabinete de Estudos e Planeamento do Ministério da Educação e Investigação Científica.